

1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera:

Sea: **E** = Campo Eléctrico
B = Flujo de campo magnético
H = Intensidad magnética
D = Campo eléctrico de desplazamiento
J = Densidad de corriente
 ρ = densidad de carga

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{B} && \text{(Ley de Faraday)} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} && \text{(Ley de Ampere generalizada)} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho && \text{(Ley de Gauss)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(Continuidad de flujo magnético)} \\ \nabla \times \mathbf{J} &= -j\omega \rho && \text{(Ley de continuidad)}\end{aligned}$$

En el espacio libre (vacío):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \text{ F/m} \quad \text{permitividad del espacio libre}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hr/m} \quad \text{permeabilidad del espacio libre}$$

En un medio con pérdidas (ϵ, s)

$$\mathbf{J}_c = s \mathbf{E} \quad (\mathbf{J}_c : \text{corriente de conducción, } s : \text{conductividad})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (j\omega \epsilon + s) \mathbf{E} + \mathbf{J} = j\omega \underbrace{\left(\epsilon + \frac{s}{j\omega} \right)}_{\text{Permitividad Compleja}} \mathbf{E} + \mathbf{J}$$

En general si σ fuera cero $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$

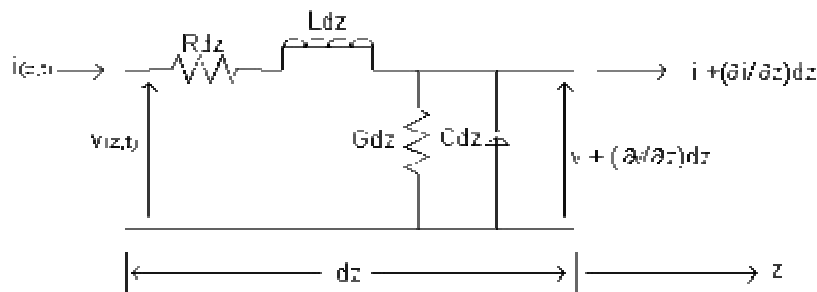
A menudo es necesario encontrar soluciones a las ecuaciones de Maxwell en regiones no homogéneas para los casos:

La frontera de un conductor perfecto

La frontera de un conductor imperfecto

La frontera entre dos medios dieléctricos diferentes.

Conductor paralelo muy largo, su circuito equivalente para un dz es:



Aplicando Kirchof:

$$v - \left(v + \frac{\partial v}{\partial z} dz\right) = (iR + L \frac{\partial i}{\partial t}) dz$$

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial z} dz\right) = (vG + C \frac{\partial v}{\partial t}) dz$$

ó

$$\frac{\partial v}{\partial z} = - \left(iR + L \frac{\partial i}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \left(vG + C \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

donde:

R es resistencia por metro

L es inductancia por metro

C es capacitancia en paralelo por metro

G es conductancia en paralelo por metro

Para estado estacionario sinusoidal, usando análisis fasorial:

$$\frac{dV}{dz} = -(R + j\omega L)I$$

$$\frac{dI}{dz} = -(G + j\omega C)V \dots\dots(a)$$

Formando d^2V/dz^2 y usando (α) para reemplazar dI/dz , obtenemos:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V$$

Que tiene por solución:

$$V = V^+ e^{-gz} + V^- e^{+gz}$$

$$\text{donde : } g = jb + a = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

V^+ y V^- son las amplitudes complejas de la onda propagándose en las direcciones $+z$ y $-z$ respectivamente, como en la mayoría de los casos $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$, se puede:

$$g \approx j\omega\sqrt{LC} \left[\left(1 + \frac{R}{2j\omega L} \right) \left(1 + \frac{G}{2j\omega C} \right) \right]$$

$$g \approx j\omega\sqrt{LC} + \frac{1}{2} \left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} \right)$$

En el caso teórico de una línea libre de pérdidas, es decir si $R = G = 0$, tenemos:

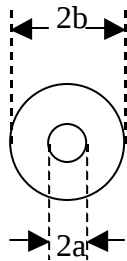
$$g = jb = j\omega\sqrt{LC}$$

$$j\omega\sqrt{m_0\epsilon_0} = j\frac{\omega}{c} = jK_0$$

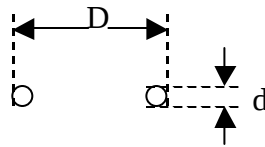
$$I = \frac{V^+}{Z_C} e^{-jbz} - \frac{V^-}{Z_C} e^{+jbz}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad Z \text{ es la impedancia característica de la línea de transmisión}$$

Para una línea coaxial y una línea bifilar:

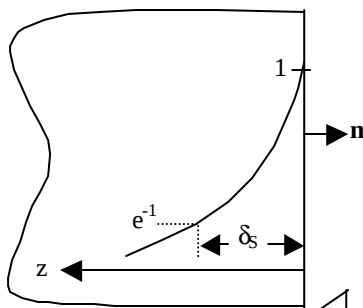


$$Z_C = 60\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}$$



$$Z_C = 120 \cosh^{-1} \frac{D}{d}$$

Frontera de un conductor Imperfecto:



En un conductor real, el campo electromagnético penetra un poco, con una amplitud que cae exponencialmente de acuerdo a: e^{-z/δ_s} , donde: z es la distancia dentro del conductor y

$$\delta_s = \left(\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma} \right)^{1/2} \text{ es la profundidad del efecto}$$

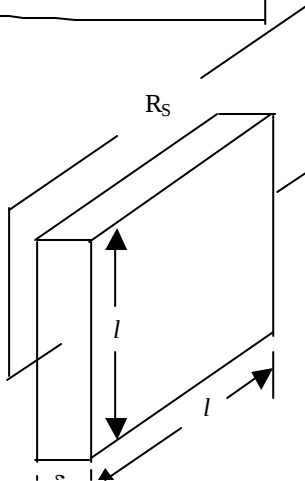
pelicular (SKIN DEEPH).

La Resistencia superficial (R_s) es la R_{DC} de un cuadrado de lado l y espesor δ_s .

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta_s}$$

Ejemplo: Para el Cu: $\sigma = 5.8 \times 10^{-7} \text{ S/m}$

$$\delta_s = \begin{cases} 6.6 \times 10^{-3} \text{ cm @ 1MHz} \\ 2.1 \times 10^{-4} \text{ cm @ 1GHz} \end{cases}$$



Para propósitos prácticos el campo E.M. se considera que no penetra en un buen conductor, como en los metales.

Aunque el hecho de que el metal tiene una $\sigma \neq \infty$ implica que existe disipación ó pérdida óhmica en el metal. Cuando es necesario calcular esta pérdida, se usa en siguiente procedimiento aproximado, el cual es ampliamente usado para encontrar la atenuación en líneas de transmisión, guías de onda:

1° se asume conductividad perfecta ($\sigma = \infty$) y $\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$, el campo eléctrico actual tangente a la superficie está relacionado a su densidad de corriente por la relación: $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = Z_s \mathbf{n} \times \mathbf{J}_s$

donde Z_s es la impedancia de superficie del conductor: $Z_s = \frac{1+j}{s d_s}$, donde: $\frac{1}{s d_s}$ es la

equivalente estática o resistencia DC de una hoja cuadrada de metal de espesor igual a d_s y con conductividad σ . Hay un componente inductivo igual debido a la penetración del campo magnético.

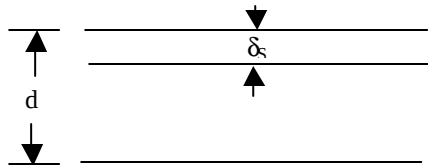
La pérdida de potencia ocurre por unidad de área y está dado por la parte real del vector de Poynting complejo de flujo, normal a la superficie y es:

$$P = -\frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = -\frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{n} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^* \} = P = -\frac{1}{2} \text{Re} \{ Z_s \mathbf{n} \times \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{H}^* \}$$

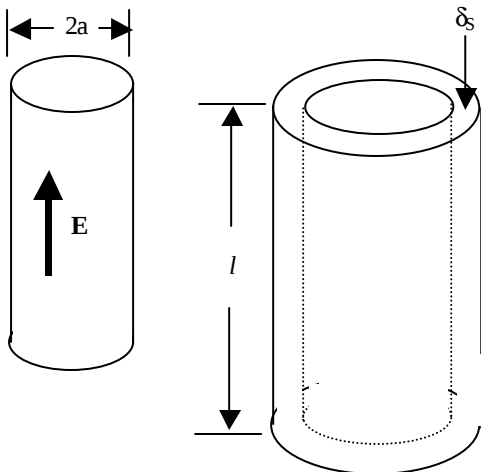
$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \{ Z_s \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ Z_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* \} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{J}_s|^2}{s d_s}$$

El signo (-) al comienzo es debido al que $\mathbf{n}$ está siendo dirigido hacia fuera, el (*) denota valor complejo conjugado, cuando $\sigma \rightarrow \infty$, d_s , Z_s y la pérdida se desvanecen comparada con

$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 377 \Omega$ del espacio libre, para el Cu @ 1 MHz $Z_s = 2.6 \times 10^{-4} (1+j) \Omega$, esto es válido sí: $d \geq 3d_s$, es decir:



Ejemplo: Calcular Z_{AC} de un alambre, $D = 2a = 0.4 \text{ cm}$ @ 1 MHz



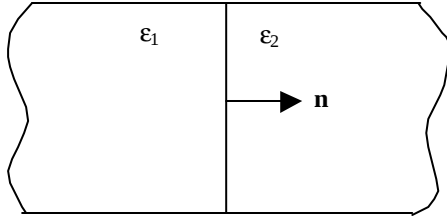
$$R = \frac{l}{(2p a d_s) s} \rightarrow \frac{R}{l} = \frac{1}{2p a s d_s}$$

Sí $D > 66d_s$ $J_s = \frac{E}{Z_s}$, donde E es el campo eléctrico axial a lo largo del alambre la $I_{TOTAL} = I = 2p a J_s$ y la caída de voltaje por unidad de longitud a lo largo del alambre iguala a E en valor. Por lo tanto:

ZAC por unidad de longitud es: $\frac{E}{I}$ ó $\frac{Z_s}{2pa}$, numéricamente:

$$Z_{AC} = \frac{2.6 \times 10^{-4}(1+j)}{2p \times 2 \times 10^{-3}} = 0.0207(1+j) \frac{\Omega}{m}$$

Frontera entre dos medios dieléctricos:



En su frontera los componentes tangenciales de los campos son iguales, es decir:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2$$

en adición, el flujo eléctrico normal es continuo:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2$$

Potenciales Escalares y Vectoriales:

Sq: $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}$ (Ley de Ampere) y $\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$ para espacio libre

y $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$ (Ley de Faraday)

y que: $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \nabla \times \mathbf{B} = K_0^2 \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{J}$, donde: $K_0 = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$ es el número de onda del espacio libre, la ecuación se debe resolver para encontrar el campo eléctrico directamente en términos de una determinada fuente de corriente $\mathbf{J}$.

En la práctica se resuelve introduciendo el vector potencial $\mathbf{A}$ y el potencial escalar f .

Desde que: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = 0$$

Cualquier función con rotacional cero puede ser expresada como el gradiente de una función escalar, luego podemos asumir que:

$$\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A} = -\nabla f$$

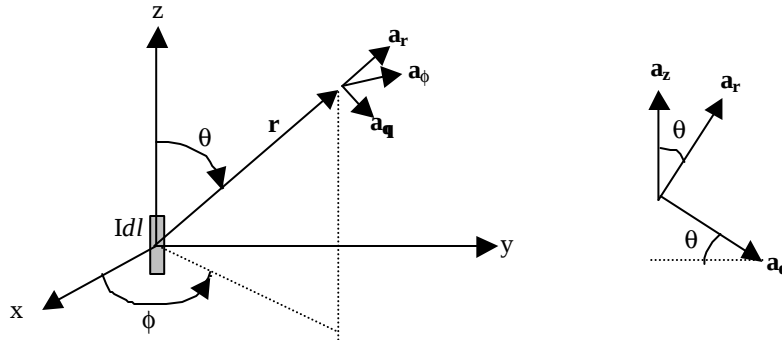
$$\nabla \times \mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = j\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{J} = j\omega \mu_0 \epsilon_0 (-j\omega \mathbf{A} - \nabla f) + \mu_0 \mathbf{J}$$

usando la expansión: $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ obtenemos después de un rearrreglo de términos: $\nabla^2 \mathbf{A} + K_0^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \mu_0 \epsilon_0 f)$ y como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ nosotros podemos libremente especificar la divergencia de $\mathbf{A}$ escogiendo: $\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \mu_0 \epsilon_0 f$ (Condición de Lorentz), ahora nuestra ecuación para $\mathbf{A}$ llega a convertirse en la ecuación no homogénea de Helmholtz: $\nabla^2 \mathbf{A} + K_0^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$, con igual procedimiento: $\nabla^2 f + K_0^2 f = r / \epsilon_0$, sin embargo, la carga no es una fuente independiente para campos variables en el tiempo, desde que está relacionado a la corriente por la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega r$ y no es necesario resolverlo para f . Usando la condición de Lorentz ($\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \mu_0 \epsilon_0 f$) en: $\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A} = -\nabla f$, podemos encontrar el campo eléctrico en términos del vector potencial $\mathbf{A}$ sólo por medio de la relación: $\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{j\omega \mu_0 \epsilon_0}$

Esta simplificación obtenida por la introducción de $\mathbf{A}$ puede ser apreciada por considerar el caso de una fuente de corriente: $\mathbf{J} = J_z \mathbf{a}_z$ en la cual $\mathbf{A} = A_z \mathbf{a}_z$ y A_z es una solución de la ecuación escalar: $(\nabla^2 + K_0^2) A_z = -m_0 J_z$

Esta ecuación satisfecha por el campo eléctrico, es una ecuación vectorial aun cuando la corriente sólo tiene un componente.

Radiación de un pequeño elemento de corriente:



Para esta fuente $\mathbf{A}$ solo tiene A_z es decir: $(\nabla^2 + K_0^2) A_z = m_0 J_z \dots (a)$

Donde: $J_z = \frac{I}{dS}$, dS : es la sección de área perpendicular del filamento de corriente de longitud dl y $dV = dS dl$, como existe simetría esférica en la distribución de la fuente:

$$A_z = f(r) \text{ para } r \neq 0 \text{ se tendrá: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + K_0^2 A_z = 0 \text{ (en coordenadas esféricas)}$$

$$\text{Sí: } A_z = \frac{c}{r} \text{ y } \frac{dA_z}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dc}{dr} - \frac{c}{r^2}$$

$$\therefore \frac{d^2 c}{dr^2} + K_0^2 c = 0, \text{ ecuación de movimiento armónico con soluciones: } C_1 e^{-j K_0 r}, C_2 e^{j K_0 r}$$

escogiendo la 1ª solución y restaurando el factor tiempo, obtenemos:

$$c_{(r,t)} = C_1 e^{-j K_0 r + j \omega t}, \text{ ahora } K_0 = \omega / c, \text{ donde: } c = \sqrt{m_0 e_0} \text{ (velocidad de la luz)}$$

$$c_{(r,t)} = C_1 e^{j \omega (t - r/c)}$$

Esta es la solución de onda correspondiente a una onda propagándose hacia fuera; desde que la fase esta relacionada por el factor $K_0 r$ y el retardo de tiempo correspondiente es r/c ,

tendremos: $A_z = \frac{C_1 e^{-j K_0 r}}{r}$, en razón de relacionar C_1 a la fuente, integramos ambos lados de

(a) sobre un pequeño volumen esférico de radio r_0 ($\nabla^2 A_z = \nabla \cdot \nabla A_z$) y usando el teorema de

$$\text{la divergencia: } \int_V \nabla^2 A_z dV = \int_V \nabla \cdot \nabla A_z dV = \oint_S \nabla A_z \cdot \mathbf{a}_r r_0^2 \sin \theta d\theta d\phi = -K_0^2 \int_V A_z dV - m_0 \int_V J_z dV$$

$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$, A_z varía como $1/r$, si escogemos r_0 muy pequeño, la integral de volumen que es proporcional a r_0^2 será despreciable. La integral de volumen J_z da: $J_z dS dl = Idl$, el cual es la intensidad de la fuente, también:

$$\nabla A_z \cdot \mathbf{a}_r = \frac{\partial A_z}{\partial r} = -(1 + jK_0) C_1 \frac{e^{-jK_0 r}}{r^2}$$

$$y \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_0^{2p} \int_0^p -(1 + jK_0 r_0) C_1 e^{-jK_0 r_0} \sin q \, dq \, df = -4p C_1 = -m_0 I$$

$$\therefore \mathbf{A} = m_0 I dl \frac{e^{-jK_0 r}}{4p r} \mathbf{a}_z$$

El vector potencial es una onda esférica propagándose hacia fuera con su amplitud decreciendo inversamente con la distancia.

La superficie de fase constante o retardo de tiempo constante es esférica de radio fijo r centrado en la fuente, la velocidad de fase de la onda es la velocidad de la luz, la distancia que corresponde a un cambio de fase de 2π es la longitud de onda λ_0 ($K_0 \lambda_0 = 2\pi$)

$$l_0 = \frac{2p}{K_0} = \frac{c}{w / 2p} = \frac{c}{f}$$

$$\text{Sq: } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{E} = -jw \mathbf{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{jwm_0 e_0}$$

Como: $\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r \cos q - \mathbf{a}_q \sin q$

$$\text{y: } \mathbf{A} = \frac{m_0 I dl}{4p r} e^{-jK_0 r} (\mathbf{a}_r \cos q - \mathbf{a}_q \sin q)$$

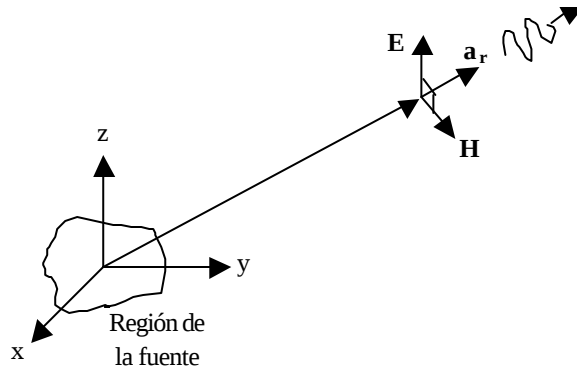
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{H} = \frac{1}{m_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{Idl \sin q}{4p} \left(\frac{jK_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-jK_0 r} \mathbf{a}_f$$

$$\mathbf{E} = \frac{jZ_0 Idl}{2p K_0} \cos q \left(\frac{jK_0}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{a}_r - \frac{jZ_0 Idl}{4p K_0} \sin q \left(-\frac{K_0^2}{r} + \frac{jK_0}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{-jK_0 r} \mathbf{a}_q$$

$$\text{como } r \gg l_0 \rightarrow \mathbf{E} = jZ_0 Idl K_0 \sin q \frac{e^{jK_0 r}}{4p r} \mathbf{a}_q \text{ y } \mathbf{H} = jIdl K_0 \sin q \frac{e^{jK_0 r}}{4p r} \mathbf{a}_f$$

para zonas alejadas $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son perpendiculares al radio vector

$$\frac{E_q}{H_f} \text{ iguala a la impedancia intrínseca } Z_0 = \sqrt{\frac{m_0}{e_0}}$$



$$\mathbf{E} = -Z_0 \mathbf{a}_r \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} = Y_0 \mathbf{a}_r \times \mathbf{E}, \text{ donde } Y_0 = Z_0^{-1}$$

Notamos que: E_q y E_f varían con $\sin q \rightarrow$ que el campo radiante no es simétricamente esférico como lo es **A**.

El vector de Poynting complejo para el campo radiante es:

$$P = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = I \times I^* \frac{Z_0 (dl)^2 K_0^2}{32 p^2 r^2} \sin^2 q \mathbf{a}_r$$

que es real puro y en dirección radial hacia fuera.

Analizaremos los otros términos de **E** y **H**, es decir los que varían en función de $1/r^2$ y $1/r^3$, los que se volverán predominantes cuando $r < l_0$ y forman en la zona cercana campos reactivos, es decir en esta zona **P** es imaginario puro, indicando potencia reactiva en vez de potencia real radiada. Si $K_0 r$ es muy pequeño $e^{-j K_0 r} \rightarrow 1$, luego el campo de zona cercana

$$\begin{aligned} \text{será: } \mathbf{H} &= \frac{Idl \sin q}{4p r^2} \mathbf{a}_f \dots\dots\dots (b) \\ \mathbf{E} &= \frac{Idl Z_0 \cos q}{4p r^2} \left(1 + \frac{1}{j K_0 r} \right) \mathbf{a}_r + \frac{\sin q}{r^2} \left(1 + \frac{1}{j K_0 r} \right) \mathbf{a}_q \\ \text{para } K_0 r \ll 1: \quad 1 + \frac{1}{j K_0 r} &\approx \frac{1}{j K_0 r} \end{aligned}$$

la carga Q al final del filamento de corriente debe cambiar de acuerdo a $j\omega Q = I$ y desde que la corriente es la razón de cambio de la carga se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{IZ_0}{jK_0} &= \frac{j\omega Q (m_0 / e_0)^{1/2}}{j\omega (m_0 e_0)^{1/2}} = \frac{Q}{e_0} \\ \mathbf{E} &= \frac{Qdl}{4p} \left(\frac{2\cos q}{r^3} \mathbf{a}_r + \frac{\sin q}{r^3} \mathbf{a}_q \right) \dots\dots\dots (g) \end{aligned}$$

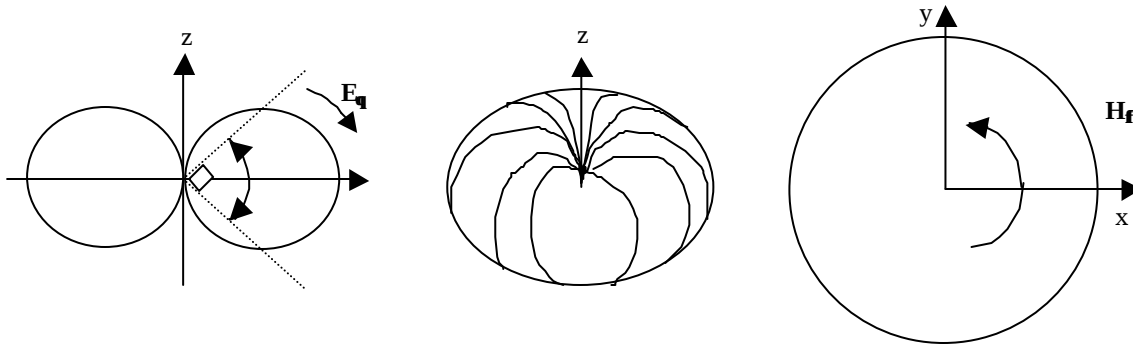
De (b) y (g) se puede reconocer como la distribución de campo estático de un filamento de corriente corto y de un dipolo eléctrico, respectivamente. Aunque la zona de campo cercano no contribuye a la potencia radiada, representa almacenamiento de energía eléctrica y magnética en el espacio inmediatamente cercano a la antena, excepto para el cálculo de Z , este campo cercano no de mucho interés.

Parámetros básicos de la antena:

La radiación producida por un pequeño filamento de corriente es comúnmente llamado radiación de un dipolo, el cual puede ser visto como una antena elemental, del cual analizaremos sus parámetros.

Patrón de Radiación:

Es la distribución relacionada con la potencia radiada como una función de la dirección en el espacio. Para un dipolo elemental la potencia radiada va acorde al $\sin^2 \theta$



El haz de media potencia esta dado por el ángulo entre los puntos en el cual la potencia radiada es la mitad de la máxima, para este caso es de 90° en el plano E y en el H es un patrón circular constante.

Ganancia y Directividad:

Directividad: $D_{(q,f)}$

La intensidad de la radiación es la potencia radiada por unidad de ángulo sólido y es obtenida multiplicando el flujo del vector de Poynting por r^2 . Para un dipolo:

$$\frac{dPr}{d\Omega} = \frac{1}{2} r^2 \text{Re} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{a}_r = I \times I^* Z_0 (dl)^2 K_0^2 \frac{\sin^2 q}{32p^2} \quad (\text{Pot. radiada por unidad de ángulo sólido})$$

$$D_{(q,f)} = \frac{dPr/d\Omega}{Pr/4p} = 4p \frac{dPr/d\Omega}{Pr} \quad \text{Pr: Potencia radiada total}$$

Para un dipolo computaremos la potencia Pr integrando el flujo de potencia del vector de Poynting a través de una superficie esférica cerrada alrededor del dipolo. Esto es equivalente a integrar la intensidad sobre el ángulo sólido de una esfera.

$$Pr = \frac{II^* Z_0 (dl)^2 K_0^2}{32p^2} \int_0^{2p} \int_0^p \sin^2 q \sin q \, dq \, df$$

desde que: $d\Omega = \sin q \, dq \, df$ y $\sin^2 q = 1 - \cos^2 q$

$$Pr = \frac{I \times I^* Z_0 (K_0 dl)^2}{12p}$$

$$\therefore D_{(q,f)} = 1.5 \sin^2 q \quad (\text{La máxima directividad es 1.5 y ocurre en } \theta = \pi/2)$$

La máxima directividad o “directividad” solamente, es la medida de la habilidad de una antena de concentrar la potencia radiada en una determinada dirección.

Para la misma cantidad de potencia radiada el dipolo produce 1.5 veces la densidad de potencia en $\theta = \pi/2$ que la que produciría un radiador isotrópico.

Un radiador isotrópico ó antena isotrópica, es una antena ficticia que radia uniformemente en todas direcciones y se usa como referencia.

Ganancia: $G_{(\theta,\phi)}$:

$$G_{(q,f)} = 4p \frac{\text{Potencia radiada por unidad de ángulo sólido}}{\text{Potencia de entrada}}$$

$$Pr = hPin \quad \begin{cases} Pr : \text{Potencia radiada total} \\ h : \text{eficiencia} \\ Pin: \text{Potencia de entrada total} \end{cases}$$

$$G_{(q,f)} = 4\pi \frac{d Pr / d\Omega}{Pin} = h D_{(q,f)}$$

EIRP: (Effective Isotropic Radiated Power)

Es el producto de la potencia de entrada por la máxima ganancia.

p.e.: $G_1 = 10$, $P_1 = 1W$ < > $G_2 = 2$, $P_2 = 5W$ es decir el producto es 10 en ambos casos.

Resistencia de Radiación:

Es la resistencia equivalente que disiparía la misma cantidad de potencia que la antena radiaría cuando la corriente en esa resistencia iguala la corriente de entrada a los terminales de la antena.

Para un dipolo la R_a se obtiene de la relación: $\frac{1}{2} |I|^2 R_a = P_r$

$$\therefore R_a = \frac{Z_0 (K_0 dl)^2}{6\pi} = 80\pi^2 \left(\frac{dl}{l_0} \right)^2$$

p.e.: $Z_0 = 120\pi$, $K_0 = 2\pi / l_0$, $dl = 1m$, $f = 1MHz \rightarrow l_0 = 300m$ y $R_a = 0.0084\Omega$

aunque el dipolo del ejemplo no es una antena práctica, ilustra que la R_a de una antena que es una pequeña fracción de una λ grande, es muy pequeña. Tales antenas presentan una reactancia muy alta y una eficiencia muy pobre, lo que significa muy poca ganancia. En antenas pequeñas, mucho de la potencia de entrada se disipa en pérdidas óhmicas, en vez de ser radiada. Para que sea eficiente una antena, su tamaño debe ser comparable a su λ de trabajo. Esta es la razón por la cual las antenas a baja frecuencia son torres muy altas, como las usadas en radiodifusión de AM de 530 a 1600 KHz con λ del orden de 600 a 200 metros.

Radiación de una pequeña espira de corriente:

Sí $r_0 \ll l_0$ la espira implica ser una fuente puntual (Dipolo magnético)

Con: $\mathbf{M} = \pi r_0^2 I \mathbf{a}_z$ (Momento magnético del dipolo), lo que implica que existe E_ϕ y H_θ

$$\mathbf{a}_f = -\mathbf{a}_x \sin f' + \mathbf{a}_y \cos f'$$

$$\text{Sq: } \mathbf{A} = \frac{m_0 I d l e^{-j K_0 r}}{4\pi r} \mathbf{a}_z$$

Para una contribución $I r_0 d f'$

$$\text{La contribución será: } \frac{m_0 I r_0 d f'}{4\pi R} (-\mathbf{a}_x \sin f' + \mathbf{a}_y \cos f') e^{-j K_0 r}$$

$$\text{Donde: } R = \left[(x - r_0 \cos f')^2 + (y - r_0 \sin f')^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

Luego A se obtiene integrando sobre la espira de corriente:

$$\mathbf{A} = \frac{m_0 I r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-j K_0 R}}{R} (-\mathbf{a}_x \sin f' + \mathbf{a}_y \cos f') d f' \quad (*)$$

Integral difícil de evaluar a menos que hagamos ciertas aproximaciones en R , consideremos la zona de campo lejano $r \gg l_0$ y $r_0 \ll l_0$ lo que implica que R se cambia por r en $(1/R)$ y $x = r \sin q \cos f$ e $y = r \sin q \sin f$ y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, luego:

$$R = \left[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \sin q (\cos f \cos f' + \sin f \sin f') \right]^{1/2}$$

r_0^2 indicado relativo a r^2 y $(1+u)^{1/2} \approx 1+u/2$ para $|u| \ll 1$

$$\therefore R \approx r - r_0 \sin q (\cos f \cos f' + \sin f \sin f')$$

en $e^{-jK_0 R}$ tenemos un término $K_0 r_0$ cuando sustituimos en nuestra expresión aproximada para R pero como $K_0 r_0 \ll 1$ y $e^u \approx 1+u$ para $|u| \ll 1$ se obtiene:

$$e^{-jK_0 R} \approx e^{-jK_0 r} \left[1 + jK_0 r_0 \sin q (\cos f \cos f' + \sin f \sin f') \right]$$

reemplazando en (*)

$$\mathbf{A} = \frac{m_0 I r_0}{4\pi R} e^{-jK_0 r} \int_0^{2p} (-\mathbf{a}_x \sin f' + \mathbf{a}_y \cos f') \times \left[1 + jK_0 r_0 \sin q (\cos f \cos f' + \sin f \sin f') \right] df'$$

los únicos términos que no integran a cero son $\cos^2 f'$ y $\sin^2 f'$, ambos tiene un factor de π ,

$$\mathbf{A} = \frac{j m_0 K_0 (p r_0^2 I)}{4\pi r} \sin q e^{-jK_0 r} \mathbf{a}_f; \quad \mathbf{a}_f = -\mathbf{a}_x \sin f + \mathbf{a}_y \cos f$$

$$\text{Luego: } \mathbf{H} = \frac{1}{m_0} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{m_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) \mathbf{a}_f = -\frac{M K_0^2 \sin q}{4\pi r} e^{-jK_0 r} \mathbf{a}_f$$

$$\text{Donde: } M = p r_0^2 I \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = -Z_0 \mathbf{a}_r \times \mathbf{H}$$

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{M Z_0 K_0^2 \sin q}{4\pi r} e^{-jK_0 r} \mathbf{a}_f$$

estas expresiones muestran el rol de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ y el caso de intercambio de la radiación de un dipolo magnético por el de la radiación de un dipolo eléctrico, el patrón de radiación ni la directividad han cambiado.

$$Pr = \frac{1}{2} \Re e \int_0^{2p} \int_0^p \mathbf{E}_f \cdot \mathbf{H}_q^* r^2 \sin q dq df = \frac{M^2 Z_0 K_0^4}{16p^2} \int_0^{2p} \int_0^p \sin^2 q \sin q dq df = \frac{M^2 Z_0 K_0^4}{12p}$$

La R_a de una espira se puede encontrar igualando: $\frac{1}{2} |I|^2 R_a = Pr$

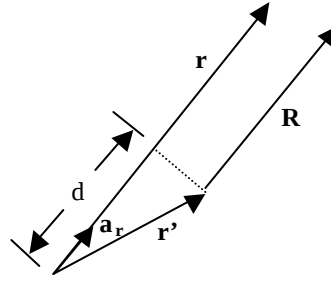
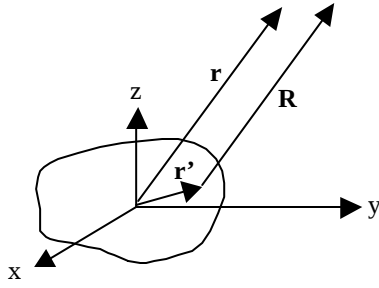
$$\text{Luego: } R_a = 320p^6 \left(\frac{r_0}{l_0} \right)^4 \quad \text{p.e.:} \quad \begin{cases} r_0 = 10\text{cm} \\ f = 1\text{MHz} \end{cases} \rightarrow R_a = 3.8 \times 10^{-9} \Omega \quad (\text{Pobre radiación})$$

Si se usan N vueltas R_a se incrementa en N^2 , antenas tipo espira pequeña, son usadas como antenas receptoras en los radios portátiles, aunque son muy ineficientes, tienen aceptable performance por gran señal de entrada.

La ganancia de una antena de espira pequeña es muy baja porque la resistencia óhmica del alambre es generalmente mucho mayor que R_a

Radiación de una distribución arbitraria de corriente:

Consideraremos la zona de campo lejano $r \gg l_0$, tenemos un volumen V con $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$:



$$d = r - R$$

$$d = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r$$

El elemento de corriente $\mathbf{J}_{(r')}dV'$ contribuirá con: $\frac{m_0 \mathbf{J}_{(r')} dV'}{4\pi R} e^{-j K_0 R}$ al $\mathbf{A}$ total donde:

$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, en la zona lejana $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$, por consiguiente: $\therefore R \approx r - \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}'$, quedando:

$$\mathbf{A}_{(r)} = \frac{m_0 e^{-j K_0 r}}{4\pi r} \int_V \mathbf{J}_{(r')} e^{-j K_0 \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}'} dV'$$

Ecuación que súper impone los efectos de cada elemento de corriente y toma en cuenta el ángulo de fase relativo o retardo de fase en la longitud del trayecto de cada contribución.

Sq: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega m_0 \epsilon_0}$ y considerando sólo los términos $\frac{1}{r}$:

$$\mathbf{E}_{(r')} = \frac{j K_0 Z_0 e^{-j K_0 r}}{4\pi R} \int_V [\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J}_{(r')} \mathbf{a}_r - \mathbf{J}_{(r')}] e^{-j K_0 \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}'} dV' \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = Y_0 \mathbf{a}_r \times \mathbf{E}$$

La forma del integrando de esta expresión muestra que en determinadas direcciones, como la especificada por $\mathbf{a}_r$, sólo la corriente perpendicular a ésta contribuye al campo radiante, la razón para esto es que el campo radiante a lo largo del elemento de corriente es cero.

Cuando la corriente es una línea de corriente I a lo largo de un contorno C , $\mathbf{E}_{(r)}$ se puede expresar como:

$$\mathbf{E}_{(r')} = \frac{j K_0 Z_0 e^{-j K_0 r}}{4\pi R} \int_C [(\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}_r - \mathbf{a}] I_{(l')} e^{-j K_0 \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}'} dl'$$

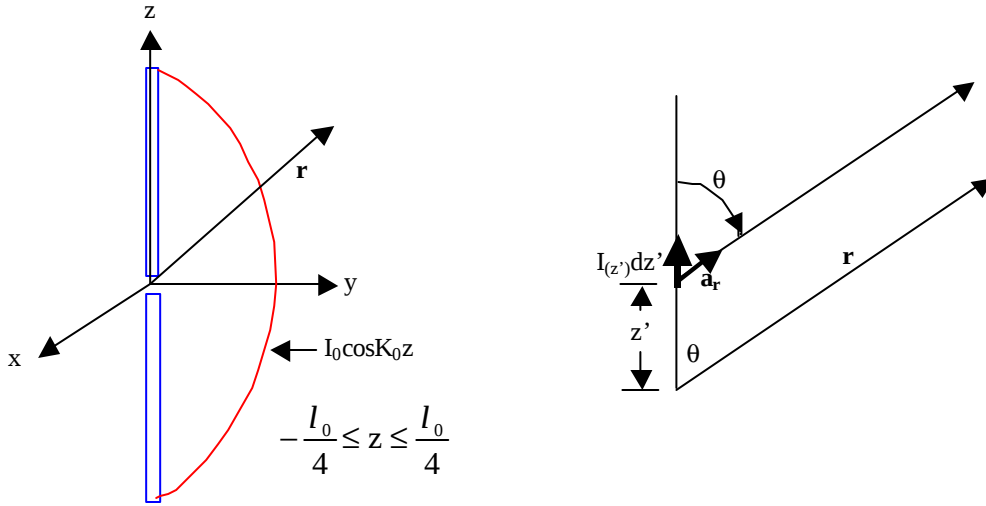
$\mathbf{a}$ está a lo largo de C en la dirección de la corriente.

$$\text{Resumiendo: } \mathbf{E}_{(r')} = \frac{j K_0 Z_0 e^{-j K_0 r}}{4\pi R} f_{(q,f)}$$

Donde: $f_{(q,f)}$ describe la amplitud del patrón de radiación ó la dependencia angular de la distribución radiada en el espacio.

y $\frac{e^{-j K_0 r}}{4\pi R}$ es la onda esférica propagándose hacia fuera.

Antena tipo dipolo de media onda:



Sí: $l_0 \ll r$ $\mathbf{a} = \mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}' = z\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = \cos q$

$$\mathbf{E} = \frac{jK_0 I_0 Z_0}{4\pi r} e^{-jK_0 r} \int_{-l_0/4}^{l_0/4} (\mathbf{a}_r \cos q - \mathbf{a}_z) \cos K_0 z' e^{jK_0 z' \cos q} dz'$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r \cos q - \mathbf{a}_q \sin q \rightarrow (\mathbf{a}_r \cos q - \mathbf{a}_z) = \mathbf{a}_q \sin q$$

$$\mathbf{E} = E_q \mathbf{a}_q = \frac{jK_0 I_0 Z_0}{4\pi r} e^{-jK_0 r} \mathbf{a}_q \sin q \int_{-l_0/4}^{l_0/4} \frac{e^{jK_0 z'} + e^{-jK_0 z'}}{2} e^{jK_0 z' \cos q} dz'$$

$$\mathbf{E} = \frac{jI_0 Z_0}{2\pi r} e^{-jK_0 r} \frac{\cos(\frac{\rho}{2} \cos q)}{\sin q} \mathbf{a}_q$$

$$\mathbf{H} = H_f \mathbf{a}_f = \frac{jI_0}{2\pi r} e^{-jK_0 r} \frac{\cos(\frac{\rho}{2} \cos q)}{\sin q} \mathbf{a}_f$$

El flujo de potencia por unidad de área:

$$\frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_r \} = \frac{1}{2} E_q H_f^* = \frac{j|I_0|^2 Z_0}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos(\frac{\rho}{2} \cos q)}{\sin q} \right]^2$$

La potencia radiada total se obtiene integrando sobre la superficie de una esfera de radio r:

$$Pr = \frac{|I_0|^2 Z_0}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\cos(\frac{\rho}{2} \cos q)}{\sin q} \right]^2 \sin q dq df$$

integral que se evalúa en términos de la integral de coseno

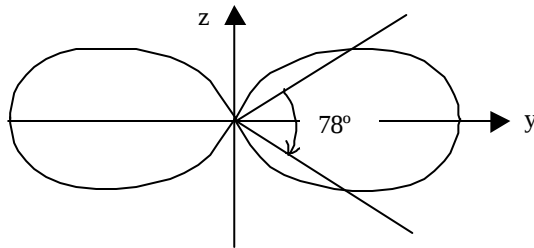
$$\text{cix} = -\int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du \quad \text{Resultado que esta tabulado, obteniéndose } Pr = 36.565 |I_0|^2,$$

$$\text{como: } \frac{1}{2} |I_0|^2 R_a = Pr \rightarrow R_a = 73.13 \Omega \rightarrow Z_{LT} = 73.14 \Omega.$$

$$Sq: D_{(q,f)} = \frac{4\pi}{Pr} \frac{dPr}{d\Omega} \rightarrow D_{(q,f)} = 1.64 \left[\frac{\cos(\frac{\rho}{2} \cos q)}{\sin q} \right]^2$$

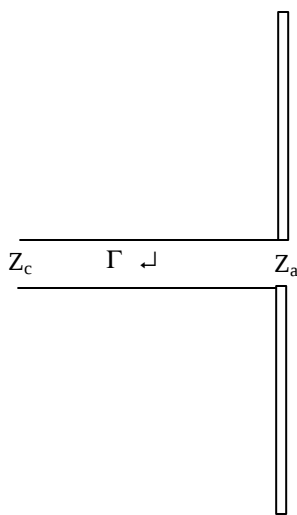
$$D_{\max} = 1.64, \text{ para dipolo de } l_0/2 \text{ contra 1.5 del dipolo corto, pero su } R_a \text{ es mayor (73.13}\Omega\text{)}$$

La ganancia es $G = 1.64$, dado que su reactancia es cero $\rightarrow Z_{in} \approx R_a$



Calculo de la Impedancia de la Antena de forma experimental:

El caso ideal: $Z_c = Z_{in} = Z_a = R_a$, en la práctica esto se consigue para un pequeño ancho de banda



$$\Gamma = \frac{Z_a - Z_c}{Z_a + Z_c} \quad \text{y} \quad \text{VSWR} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}, \quad \text{aceptable si } \text{VSWR} < 1.5 \quad \text{ó}$$

$$|\Gamma| = 0.2 \quad (4\% \text{ de coeficiente de reflexión}).$$

$$Z_a = \frac{Pr + P_d + 2j\omega(W_m - W_e)}{\frac{1}{2}I_0 I_0^*},$$

donde:

Pr : Potencia radiada

P_d : Potencia disipada en pérdidas óhmicas

W_m : Energía magnética promedio

W_e : Energía eléctrica promedio almacenada en el campo cercano reactivo

I_0 : Corriente de entrada en los terminales de la antena.

Cuando las energías magnéticas y eléctricas almacenadas son iguales, una condición de resonancia existe y Z_a se desvanece. Para un dipolo delgado esto ocurre cuando la longitud de la antena es cerca de un múltiplo de media longitud de onda ($\lambda/2$)

Calcularemos la resistencia óhmica encontrando la potencia disipada por el efecto pelicular (Skin) usando resultados anteriores, consideremos un dipolo de $\lambda/2$ hecho de una barra de cobre de radio r_0 , la $I_T = I_0 \cos K_0 z$, la densidad de corriente superficial es $(I_0/2\pi r_0) \cos K_0 z$ (asumiendo que I_0 es real):

$$P_d = \frac{1}{2} \int_0^p r_0 df \int_{-l_0/4}^{l_0/4} \left(\frac{I_0}{2\pi r_0} \right)^2 \frac{\cos^2 K_0 z}{s d_s} dz$$

$$P_d = 2\pi r_0 \frac{l_0}{8} \left(\frac{I_0}{2\pi r_0} \right)^2 \frac{1}{s d_s} = \frac{1}{2} I_0^2 R, \quad \text{donde} \quad R = \frac{l_0}{8\pi r_0 s d_s}$$

ejemplo: $r_0 = 0.5\text{cm}$, $l_0 = 3\text{cm}$ (100MHz) $\rightarrow d_s = 6.6 \times 10^{-6}\text{m}$, en el Cu. y $R = 0.062\Omega$

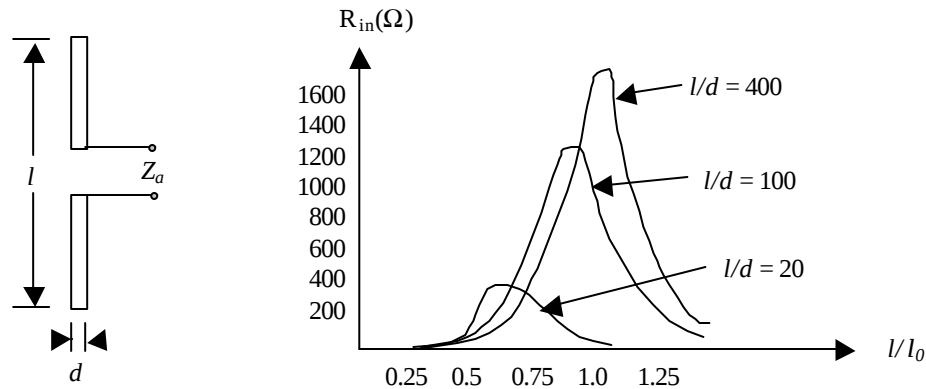
el cual es $R \ll R_a$ ($R_a = 73.13\Omega$)

Sí la corriente sobre la antena fuera uniforme como en el primer ejemplo la

$R = \frac{l}{2p r_0 s d_s} = \frac{l_0}{4p r_0 s d_s}$, la ecuación de R es de un factor de 50% menos debido a la variación cosinusoidal de la corriente. El valor promedio de $\cos^2 K_0 z$ reduce a la mitad la disipación y consecuentemente la resistencia óhmica efectiva.

$$l/l_0 \approx 0.48 \rightarrow X_a = 0 \rightarrow R_a \approx 73\Omega \quad W_e = W_m$$

$l/l_0 \approx 0.8$ a 0.9 , en este punto la resistencia de radiación es grande porque la corriente es muy pequeña, desde que la onda estacionaria de corriente en la antena ahora tiene un mínimo en vez de un máximo en los terminales de entrada.



Sí el grosor de la antena se hace más pequeño el segundo punto de resonancia se mueve hacia $l/\lambda_0 = 1$ y la resistencia de radiación alcanza valores de miles de ohmios.

Para una antena maciza la RR y X son más uniformes con cambios en l/λ_0 , característica deseable si la antena va a ser operada sobre una banda de frecuencias. Resonancias adicionales ocurren con cada incremento de l en $\lambda_0/2$.

Note también que la antena con $l/\lambda_0 \ll 0.5$ tiene resistencia de radiación muy pequeña y gran reactancia capacitiva. La antena puede ser sintonizada a resonancia con un inductor al punto de alimentación, pero la pérdida óhmica adicional en el inductor reduce la eficiencia. El ancho de banda es también reducido siempre que la antena tenga una gran reactancia de entrada que deba ser sintonizada

